

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 10

Višestruki integrali - uzastopno
integriranje

Višestruki integrali - uzastopno integriranje

0.1 Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama

Dvostrukim integralom neprekidne funkcije $f(x, y)$ preko ograđenog zatvorenog područja S nazivamo limes dvostruke integralne sume:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k) \Delta x_i \Delta y_k$$

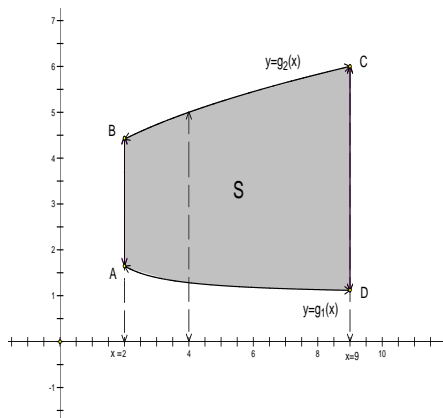
gdje je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ i $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ a točke (x_i, y_k) pripadaju području S .

Kod dvostrukog integrala vrlo je bitno pravilno odrediti granice integracije. Imamo dva osnovna tipa područja integracije:

- 1) Područje integracije S omeđeno je s lijeva i s desna pravcima $x = a$ i $x = b$ ($a < b$) a odozdo i odozgo neprekidnim krivuljama $y = g_1(x)$ i $y = g_2(x)$, $g_1(x) \leq g_2(x)$ (vidi sliku). Očito se u području S varijabla x mijenja od a do b a varijabla y od $g_1(x)$ do $g_2(x)$. Integral $\iint_{(S)} f(x, y) dx dy$ sada postaje:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Primjetimo da je veličina x u integralu $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ konstantna jer integriramo po y . (vidi sliku 1.1)

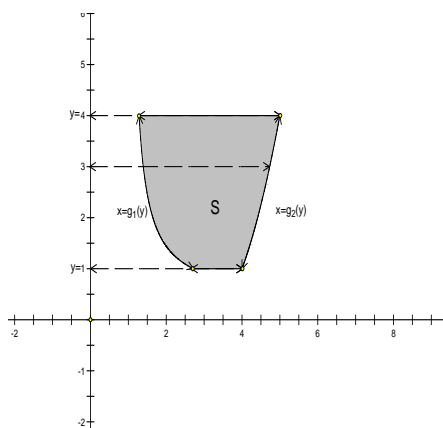


Slika 1: U području S , x se mijenja od 2 do 9 a za fiksni x , y se mijenja od $g_1(x)$ do $g_2(x)$.

- 2) Područje integracije S omeđeno je odozgo i odozdo pravcima $y = d$ i $y = c$, ($c \leq d$), a slijeva i sdesna neprekidnim krivuljama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, ($g_1(y) \leq g_2(y)$). Ovdje se y mijenja od c do d a x od $g_1(y)$ do $g_2(y)$. Integral $\iint_{(S)} f(x, y) dx dy$ sada možemo prikazati kao:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$$

i tu veličinu y u integralu $\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$ smatramo konstantnom.



Slika 2: U području S , y se mijenja od 1 do 4 a za fiksni y , x se mijenja od $g_1(y)$ do $g_2(y)$.

Svako područje integracije nastojimo razdijeliti na područja gornjih dvaju tipova.

Primjer 1 Izračunajte višestruki integral: $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx &= \text{u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta} = \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_0^1 \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{y}{3} + y^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajte dvostruki integral: $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y) dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x + 2y) dx &= \text{u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta} = \\ &= \int_{-3}^3 \left(\left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{y^2-4}^5 \right) dy = \\ &= \int_{-3}^3 \left(\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2(y^2-4)y \right) dy = \\ &= \left(\frac{25}{2}y + 5y^2 - \frac{y^5}{10} + \frac{4}{3}y^3 - 8y - \frac{y^4}{2} + 4y^2 \right) \Big|_{-3}^3 = \dots = \frac{504}{10} \end{aligned}$$

Primjer 3 Riješite integral: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr$.

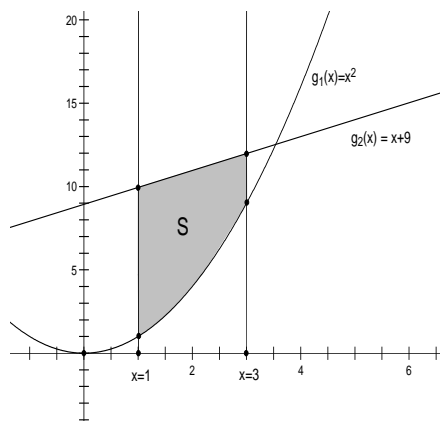
Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr &= \text{u unutarnjem integralu } \varphi \text{ je konstanta} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{a \sin \varphi}^a \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2 \pi}{2} \end{aligned}$$

U slijedećim zadacima treba napisati krivulje koje omeđuju područje S po kojem se integrira i nacrtati to područje u koordinatnoj ravnini.

1) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy$

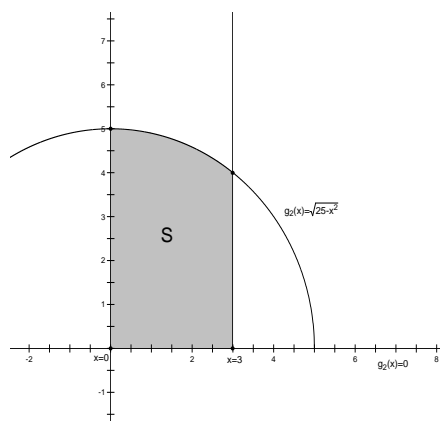
Rješenje: Područje integracije omeđeno je slijeva i zdesna pravcima $x = 1$ i $x = 3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = x + 9$.



Slika 3: U području S , x se mijenja od 1 do 3 a za fiksni x , y se mijenja od $g_1(x) = x^2$ do $g_2(x) = x + 9$.

$$2) \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

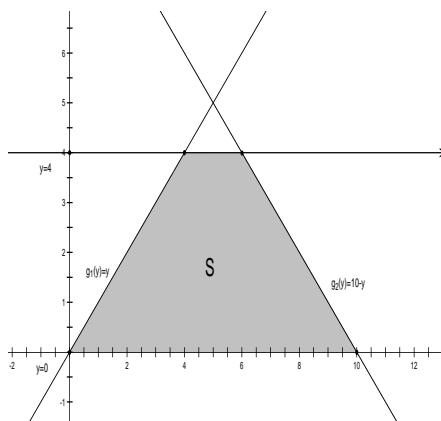
Rješenje: Područje integracije omeđeno je s lijeva i zdesna pravcima $x = 0$ i $x = 3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x) = 0$ i $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.



Slika 4: U području S , x se mijenja od 0 do 3 a za fiksni x , y se mijenja od $g_1(x) = 0$ do $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

$$3) \int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y) dx.$$

Rješenje: Ovo je integral drugog tipa, područje integracije omeđeno je odozdo i odozgo pravcima $y = 0$ i $y = 4$, a s lijeva i sdesna krivuljama (također pravcima) $g_1(y) = y$ i $g_2(y) = 10 - y$.



Slika 5: U području S , y se mijenja od 0 do 4 a za fiksni y , x se mijenja od $g_1(y) = y$ do $g_2(y) = 10 - y$.

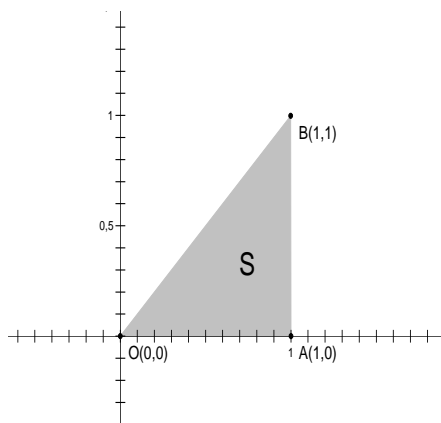
Zadatak 1 Odredite granice integracije u oba poretka za dvostruki integral

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy$$

ako je:

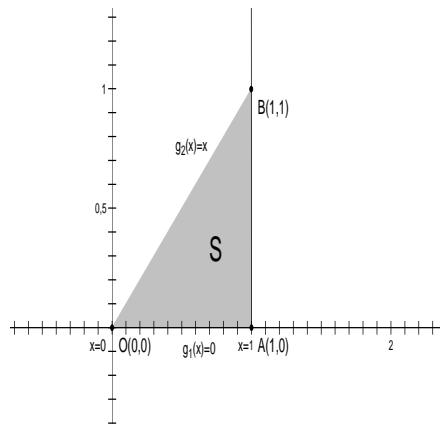
- 1) S trokut s vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ i $B(1, 1)$.

Rješenje: Prvo skiciramo područje integracije kako bismo lakše odredili granice:



Slika 6: Trokut sa vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ i $B(1, 1)$.

Radimo prvo integraciju prvog tipa, x očito ide od 0 do 1. Da bismo odredili kako se mijenja y za fiksni x treba nam samo jednadžba pravca kroz točke O i B koji čini gornju granicu integracije (donja granica je, jasno, $g_1(x) = 0$).

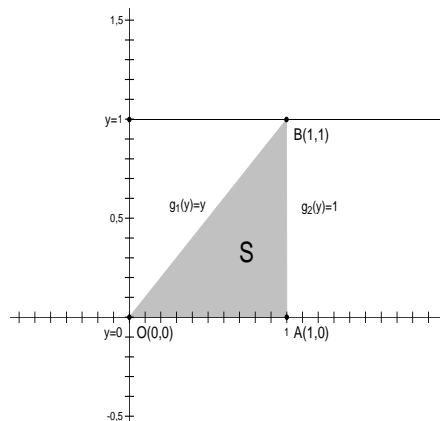


Slika 7: Jednadžbe krivulja za integraciju prvog tipa.

Jednadžba pravca glasi $y = x$ pa imamo da je $g_2(x) = x$ i konačno:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy.$$

Sada mijenjamo poredak integracije, odnosno prelazimo na integral drugog tipa. Iz slike je vidljivo da y također ide od 0 do 1 a da bi odredili granice od x za fiksni y , treba nam pravac kroz točke 0 i B koji čini lijevu među. Jednadžba tog pravca glasi (sada je y fiksiran, prisjetimo se) $x = y$ pa je $g_1(y) = y$. Desna granica je, očito, pravac $x = 1$ tj. konstantna funkcija $g_2(y) = 1$.



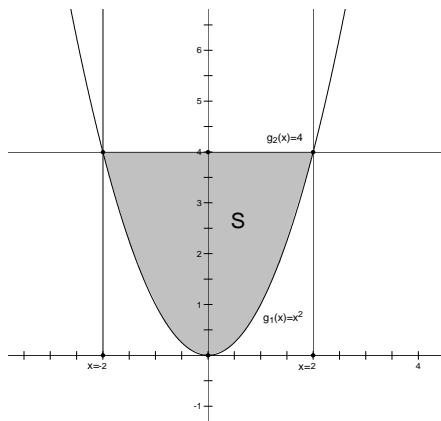
Slika 8: Jednadžbe krivulja za integraciju drugog tipa.

Dakle, imamo:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

2) S odsječak parabole $y = x^2$ omeđen tom parabolom i pravcem $y = 4$.

Rješenje: Skiciramo područje S i unosimo potrebne podatke za integraciju prvog tipa:

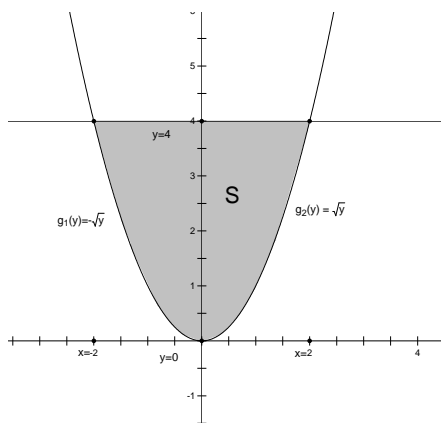


Slika 9: Područje S . Vidljivo je da x ide od -2 do 2 , a da se y pri tome mijenja od $g_1(x) = x^2$ (donja granica), do $g_2(x) = 4$ (gornja granica).

Na slici je vidljivo da x ide od -2 do 2 a y je za fiksni x ograničen krivuljama $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = 4$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy.$$

Gledamo drugi poredak integracije, sada se prvo mijenja y od 0 do 4 , a onda za fiksni y , integriramo po x -u od $-\sqrt{y}$ do \sqrt{y} .



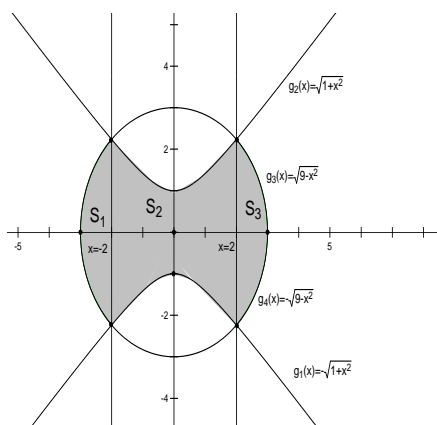
Slika 10: Područje S . Sada y ide od 0 do 4 , a x se pri tome mijenja od $g_1(y) = -\sqrt{y}$ (donja granica), do $g_2(y) = \sqrt{y}$ (gornja granica).

Imamo:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

- 3) S područje omeđeno hiperbolom $y^2 - x^2 = 1$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 9$ (ima se u vidu područje koje sadrži ishodište koordinatnog sustava).

Rješenje: Skiciramo područje s podacima za integraciju prvog tipa i pri tome uzimamo u obzir da se naše krivulje sijeku u točkama $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$, $(-2, \sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$ što se lagano dobije izjednačavanjem jednadžbi $y^2 = 1 + x^2$ i $y^2 = 9 - x^2$. Sada primjećujemo da se područje S mora razbiti na tri područja prvog tipa, S_1, S_2 i S_3 . Integriramo po sva tri područja i rezultat zbrajamo.



Slika 11: Područje S sastoji se od tri područja prvog tipa S_1, S_2 i S_3 pa integriramo po svakom od njih i rezultat je zbroj tih integrala.

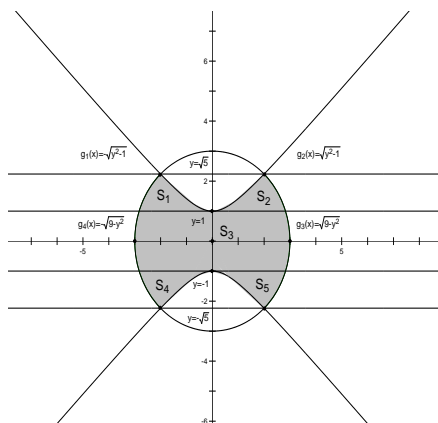
Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y) dx dy &= \iint_{(S_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_3)} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Za integraciju drugog tipa imamo sliku:

Kao i u gornjem primjeru, područje S raspada se na pet područja drugog tipa, pa integriramo po svakom od tih područja i rezultat je zbroj tih integrala:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{(S_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_3)} f(x, y) dx dy +$$



Slika 12: Područje S sastoji se od pet područja drugog tipa.

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{(S_4)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_5)} f(x, y) dx dy = \\
 & = \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \\
 & + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx + \\
 & + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

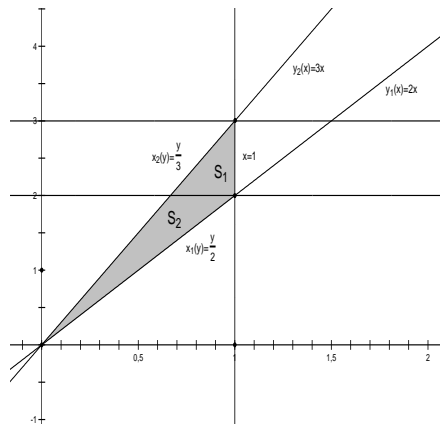
Zadatak 2 Promijenite poredak integriranja u slijedećim dvostrukim integralima:

- 1) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy,$
- 2) $\int_{-\sqrt{2}}^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx,$
- 3) $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$

Rješenje:

- 1) Skiciramo područje integracije, x ide od 0 do 1, a za fiksni x , y se mijenja od $2x$ do $3x$.

Ako sada promijenimo poredak integracije, dakle, integriramo prvo po y , a onda po x , slika pokazuje da područje S treba razbiti na dva osnovna područja za integraciju drugog tipa.

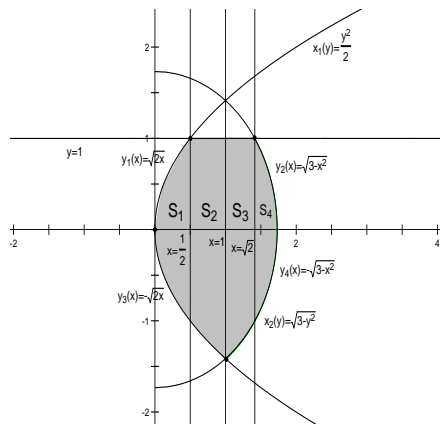


Slika 13: Područje integracije.

Stoga imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy &= \iint_{(S_1)} f(x, y) dy dx + \iint_{(S_2)} f(x, y) dy dx = \\ &= \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{3}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

2) Crtamo područje integracije:



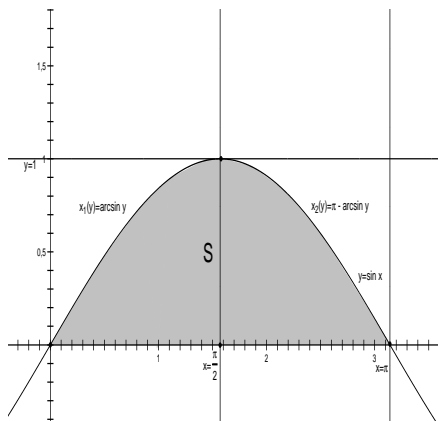
Slika 14: Područje integracije.

Sada vidimo da u obrnutom poretku integriranja ponovno moramo razbijati područje na četiri osnovna dijela pa redom imamo:

$$\int_{-\sqrt{2}}^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{2x}}^1 +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^1 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy$$

3) Prikazujemo područje u koordinatnoj ravnini:



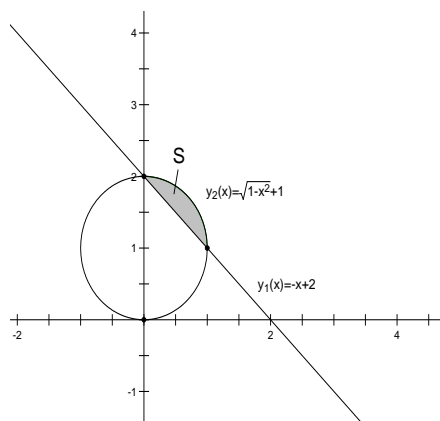
Slika 15: Područje integracije.

Vidimo da, pri promijeni poretka integracije, ponovno imamo samo jedno osnovno područje S pa je:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

Zadatak 3 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} x dx dy$ gdje je S područje omeđeno pravcem koji prolazi točkama $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ i lukom kružnice $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Rješenje: Jednadžba pravca koji prolazi točkama A i B glasi: $y = -x + 2$.
Crtamo sliku:



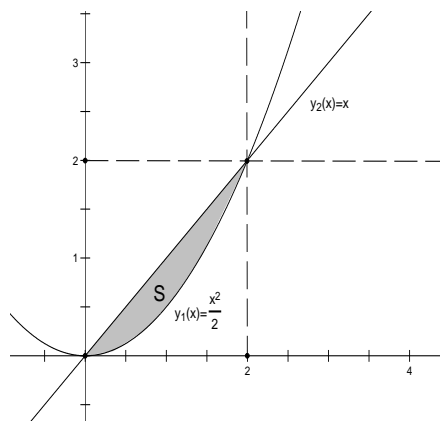
Slika 16: Područje integracije.

Možemo primjeniti bilo koji tip integracije, mi ćemo riješiti zadatak pomoću prvog. Pravac i kružnica sijeku se u točkama $(0, 2)$ i $(1, 1)$. To se lako dobije rješavanjem jednadžbe $x^2 + (-x+1)^2 = 1$ koja se dobije uvrštavanjem jednadžbe pravca $y = -x + 2$ u jednadžbu kružnice $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Sada je sa slike vidljivo da imamo:

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} x dx dy &= \int_0^1 dx \int_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} x dy = \int_0^1 \left(xy \Big|_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} \right) dx \\
 &= \int_0^1 (x(\sqrt{1-x^2} + 1) - x(-x + 2)) dx = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} + x^2 - x) dx = \\
 &= \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Zadatak 4 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ gdje je S područje omeđeno parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i pravcem $y = x$.

Rješenje: Skiciramo područje integracije:



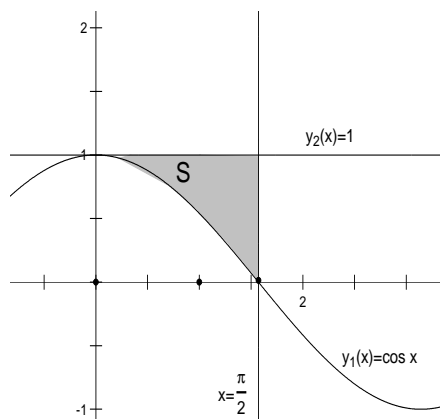
Slika 17: Područje integracije.

Zadane krivulje sijeku se u točkama $(0,0)$ i $(2,2)$ što je vidljivo sa slike, a laganano se dobije rješavanjem jednadžbe $x = \frac{x^2}{2}$. Koristeći integraciju prvog tipa, dobivamo:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^2 \left(\arctan \frac{y}{x} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} x - x \arctan \frac{x}{2} + \ln(4 + x^2) \right) \Big|_0^2 = \ln 2 \end{aligned}$$

Zadatak 5 Izračunajte dvostruki integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^1 y^4 dy$ i nacrtajte područje integracije.

Rješenje: Prvo crtamo područje integracije:



Slika 18: Područje integracije.

a zatim rješavamo integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^1 y^4 dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y^5}{5} \Big|_{\cos x}^1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} (1 - \cos^5 x) dx = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (1 - \sin^2 x)^2 \cos x) dx = \\
 &= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x) dx = \\
 &= \frac{1}{5} \left(x - \sin x + \frac{2}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{15\pi - 16}{150}
 \end{aligned}$$

0.2 Dvostruki integral u polarnim koordinatama

Prisjetimo se veze između polarnih i pravokutnih koordinata:

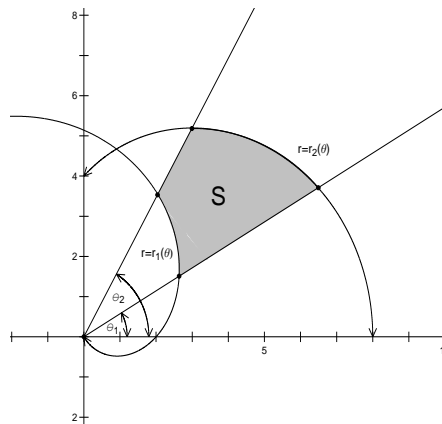
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Za dvostruki integral vrijedi sljedeća formula:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{(S)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Područje S sada mora imati granice po r i po φ . Tu primjenjujemo sljedeće pravilo: ako je područje integracije S omeđeno zrakama $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) te krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$), onda dvostruki integral računamo po formuli:

$$\iint_{(S)} f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r, \varphi) r dr.$$



Slika 19: Osnovno područje integracije u polarnim koordinatama.

Ako S nema taj oblik, onda ga, kao i kod pravokutnih koordinata, moramo razdijeliti na područja takvog oblika.

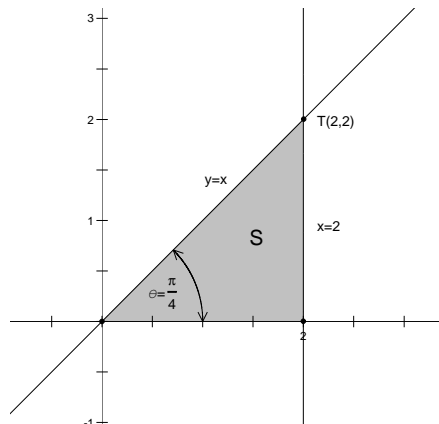
Primjer 4 Transformirajte sljedeće integrale u integrale s polarnim koordinatama pazeći pri tome na promjene granica integriranja.

- 1) $\int_0^2 dx \int_0^x f(x, y) dy,$
- 2) $\iint_{(S)} f(x^2 + y^2) dx dy,$
gdje je S područje omeđeno pravcima $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.
- 3) $\iint_{(S)} f(x, y) dx dy,$
gdje je S područje omeđeno lemniskatom

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$$

Rješenje:

- 1) Prvo moramo skicirati područje integracije i odrediti njegove granice u polarnim koordinatama. Jednažba pravca $x = 2$ u polarnim koordinatama glasi: $r \cos \theta = 2$ tj. $r = \frac{2}{\cos \theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Zraka $y = x$, $x \geq 0$, glasi $\theta = \frac{\pi}{4}$ jer sve točke na tom pravcu imaju taj kut. Dakle, imamo:

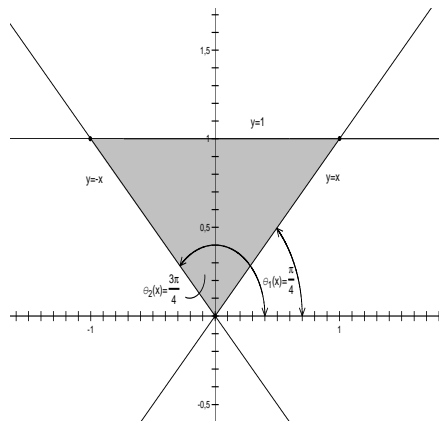


Slika 20: Područje integracije.

Sada je vidljivo da, u polarnim koordinatama, θ ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$, a, za fiksni θ , r se mijenja od 0 do $\frac{2}{\cos \theta}$. Stoga je:

$$\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

2) Crtamo područje integracije:



Slika 21: Područje integracije.

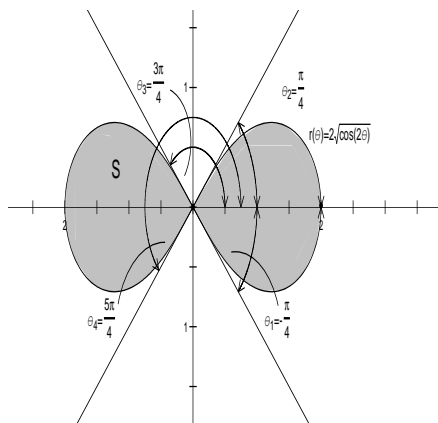
Kut θ se očito mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{3\pi}{4}$, a radijus r od 0 do $\frac{1}{\sin \theta}$, $0 < \theta < \pi$, što je i jednačina pravca $y = 1$ u polarnim koordinatama. Ako još primjetimo da je $f(x^2 + y^2) = f(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) = f(r^2)$ u polarnim koordinatama, onda imamo:

$$\iint_{(S)} f(x^2 + y^2) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(r^2) r dr.$$

- 3) Tražimo jednadžbu lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ u polarnim koordinatama. Znamo da je $x = r \cos \theta$ i $y = r \sin \theta$ pa to uvrštavamo u zadanu jednadžbu i dobivamo:

$$\begin{aligned} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2 &= 4(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) \\ \Rightarrow r^4 &= 4r^2(2 \cos^2 \theta - 1) \quad /r^2 \\ \Rightarrow r^2 &= 4(\cos(2\theta)) \\ \Rightarrow r &= 2\sqrt{\cos(2\theta)} \end{aligned}$$

Crtamo područje:



Slika 22: Područje integracije.

Vidljivo je da se kut θ mijenja od $-\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{4}$ i od $\frac{3\pi}{4}$ do $\frac{5\pi}{4}$ (što dobivamo rješavajući jednadžbu $r = \cos(2\theta) \geq 0$). Za fiksni θ , r se mijenja od 0 do $2\sqrt{\cos(2\theta)}$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

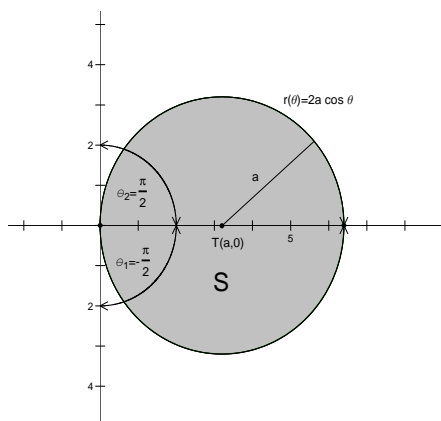
Zadatak 6 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

ako je S područje omeđeno kružnicom $x^2 + y^2 = 2ax$ gdje je $a > 0$.

Rješenje: Svodimo na puni kvadrat izraz $x^2 + y^2 = 2ax$ i dobivamo $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ iz čega je odmah vidljivo da se zaista radi o kružnici sa središtem u $T(a, 0)$ radijusa a . Tražimo njenu jednadžbu u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta &= 2ar \cos \theta \\ \Rightarrow r^2 &= 2ar \cos \theta \quad / \\ \Rightarrow r &= 2a \cos \theta \end{aligned}$$



Slika 23: Područje integracije.

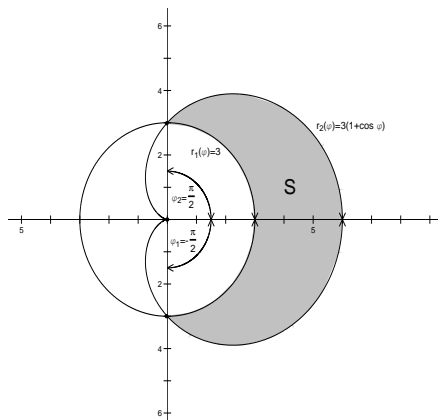
Sada crtamo tu kružnicu:

Kut θ mijenja se od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, a za fiksni θ , r ide od 0 do $2a \cos \theta$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
 \iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r \cdot r dr \quad (\text{jer } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r) \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (8a^3 \cos^3 \theta) d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \\
 &= \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \frac{8a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \\
 &= \frac{8a^3}{3} \left(\sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{8a^3}{9} \left(\sin^3 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{32a^3}{9}
 \end{aligned}$$

Zadatak 7 Izračunajte dvostruki integral funkcije $f(r, \varphi) = r$ u području omeđenom kardiodom $r = 3(1 + \cos \varphi)$ i kružnicom $r = 3$ (misli se na područje koje ne sadrži ishodište).

Rješenje: Krivulje koje omeđuju područje integracije već su zadane u polarnim koordinatama pa možemo odmah crtati sliku:



Slika 24: Područje integracije.

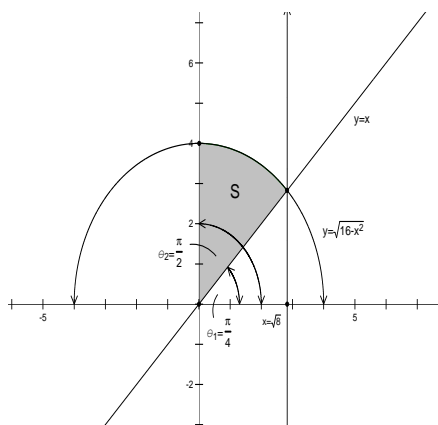
Sada imamo:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(r, \varphi) r dr d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_3^{3(1+\cos \varphi)} r \cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_3^{3(1+\cos \varphi)} \right) d\varphi = \\ &= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((1 + \cos \varphi)^3 - 1) d\varphi = \dots = 66 + 27 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Zadatak 8 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte :

$$\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

Rješenje: Iz integrala vidimo da se x mijenja od 0 do $2\sqrt{2}$, a za fiksni x , y ide od 0 do $\sqrt{16-x^2}$. Prema tome, radi se o sljedećem području:



Slika 25: Područje integracije.

Ako pogledamo područje u polarnim koordinatama, vidimo da se θ mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$ a za fiksno θ , r ide od 0 do 4 jer je jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 16$ u polarnim koordinatama glasi $r = 4$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 \sqrt{r^2} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 r^2 dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^4 \right) d\theta = \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

0.3 Izračunavanje površina likova

- 1) **Površina u pravokutnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} dx dy$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, svodi na dvostruki integral:

$$P_S = \iint_{(S)} dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$$

Primjetimo da je:

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy = \int_a^b \left(y \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} \right) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

što je formula za površinu (omeđenu krivuljama $x = a$, $x = b$ i $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$) koju znamo otprije (vidi poglavlje određeni integral).

- 2) **Površina u polarnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} r dr d\theta,$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$, svodi na polarni integral:

$$P_S = \iint_{(S)} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr.$$

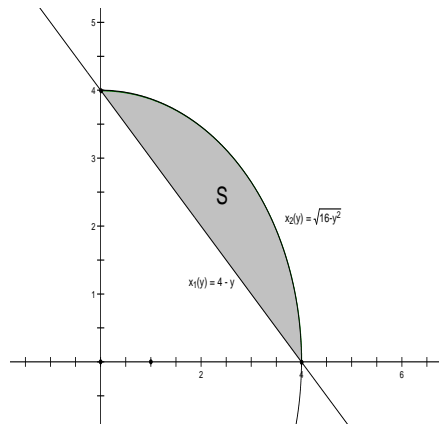
Primjer 5 Skicirajte područja kojima su površine izražene integralima:

- 1) $\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx$,
- 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos \varphi}} r dr$

Izračunajte te površine.

Rješenje:

- 1) Vidimo da se y mijenja od 0 do 4, a x (za fiksno y) od $4 - y$ do $\sqrt{16 - y^2}$. Dakle, imamo:

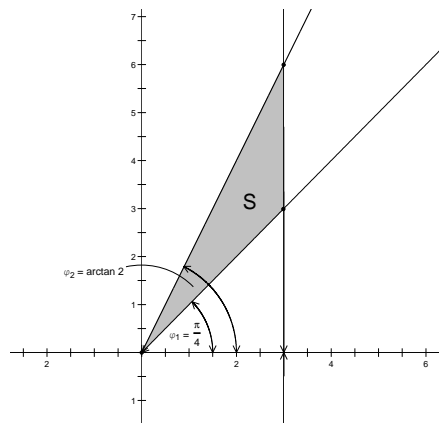


Slika 26: Područje integracije.

Sada je površina:

$$\begin{aligned} \int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx &= \int_0^4 \left(x \Big|_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} \right) dy = \int_0^4 (\sqrt{16-y^2} - 4 + y) dy = \\ &= \frac{y}{2} \sqrt{16-y^2} + 8 \arcsin \frac{y}{4} - 4y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = 4\pi - 8 \end{aligned}$$

- 2) Ovdje se kut mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\arctan 2$, a za fiksni kut, radijus ide od 0 do $\frac{3}{\cos \varphi}$. Crtamo to područje:



Slika 27: Područje integracije.

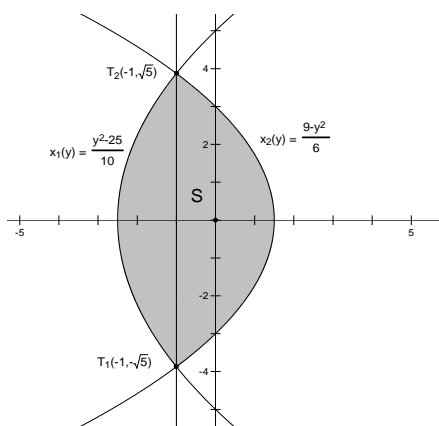
Još ostaje izračunati integral:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos \varphi}} r dr &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \left(r^2 \Big|_0^{\frac{3}{\cos \varphi}} \right) d\varphi = \frac{9}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{9}{2} \left(\tan \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Zadatak 9 Nađite površinu omeđenu parabolama:

$$y^2 = 10x + 25 \quad \text{i} \quad y^2 = -6x + 9.$$

Rješenje: Da bi znali nacrtati traženu površinu, prvo trebamo odrediti presjek danih krivulja. Rješavajući jednadžbu $10x + 25 = -6x + 9$ odmah vidimo su jedine točke presjeka $T_1(-1, \sqrt{15})$ i $T_2(-1, -\sqrt{15})$. Sada imamo:



Slika 28: Područje integracije.

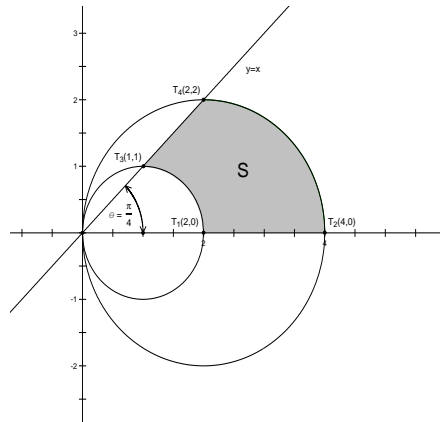
Sa slike vidimo da je bolje integrirati prvo po y , a onda po x , jer tako ne moramo razbijati područje na dva komada. Računamo površinu od S :

$$\begin{aligned} P_S &= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(x \Big|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} \right) dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} + \frac{25-y^2}{10} \right) dy = \\ &= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \frac{60-4y^2}{15} dy = \dots = \frac{16}{3} \sqrt{15} \end{aligned}$$

Zadatak 10 Prelaskom na polarne koordinate nađite površinu omeđenu krivuljama:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Rješenje: Svođenjem na puni kvadrat jasno je da su prve dvije krivulje kružnice i to redom: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, i $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Crtamo krivulje i nalazimo točke presjeka te dobivamo:



Slika 29: Područje integracije.

Trebaju nam jednačbe kružnica u polarnim koordinatama. Veća kružnica glasi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x \Rightarrow \\ r_1^2 &= 4r_1 \cos \theta \Rightarrow \\ r_1 &= 4 \cos \theta. \end{aligned}$$

Analogno tome, za manju kružnicu dobivamo:

$$r_2 = 2 \cos \theta.$$

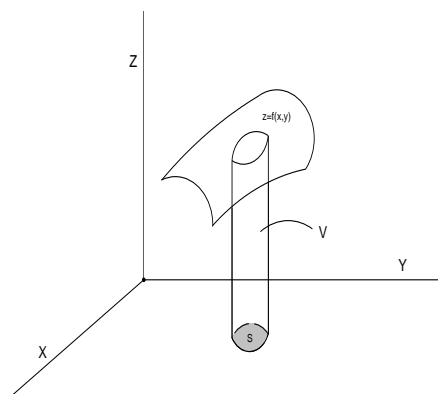
Kako kut ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$ (jer je kut pravca $y = x$ sa x -osi upravo $\frac{\pi}{4}$), dobivamo za površinu od S :

$$\begin{aligned} P_S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \right) d\theta = \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \\ &= 3 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

0.4 Računanje volumena tijela

Volumen cilindroida koji je omeđen odozgo plohom $f(x, y)$, odozdo ravninom $z = 0$ i koji u toj ravnini izrezuje omeđeno područje S (vidi sliku), dan je sa:

$$V = \iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$



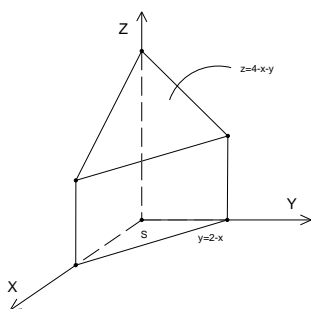
Slika 30: Cilindroid sa bazom S .

Zadatak 11 Nacrtajte tijela kojima su volumeni izraženi dvostrukim integralom:

- a) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y) dy$,
 b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$.

Rješenje:

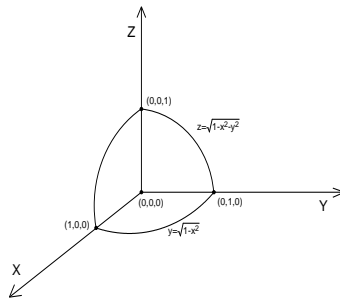
- a) Vidimo da je u pitanju cilindroid odozgo omeđen sa ravninom $z = 4 - x - y$ i sa bazom u obliku trokuta u $z = 0$ ravini kojem je jedna stranica x -os od 0 do 2, druga y -os od 0 do 2 (tu pravac $y = 2 - x$ siječe y -os) a treća pravac $y = 2 - x$. Crtamo sliku:



Slika 31: Cilindroid sa trokutastom bazom omeđen ravninom $z = 4 - x - y$.

- b) Ovdje je baza prva četvrtina kruga $x^2 + y^2 = 1$. To slijedi iz činjenice da x ide od 0 do 1, a y od 0 do $\sqrt{1-x^2}$. Ako pogledamo gornju među

cilindroida, plohu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, vidimo da se radi o jediničnoj sferi. Dakle, u pitanju je jedan osmina sfere i to ona koja se nalazi u prostornom kvadrantu u kojem su i x i y i z pozitivni.



Slika 32: Osmina sfere u oktantu gdje su sve koordinate pozitivne.

Zadatak 12 Nadite volumen tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2 + 1$, ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim ravninama.

Rješenje: Gornja granica je zadani paraboloid, a omeđenost koordinatnim ravninama i ravninom $x + y = 1$ (koja je okomita na ravninu $z = 0$) nam govori da je baza trokut koji čine pravci $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 1$ u $z = 0$ ravnini. Vrhovi tog trokuta su ishodište, $(1, 0, 0)$, i $(0, 1, 0)$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 \left(2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + 1-x \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{7}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3} \right) dx = \left(x^3 - \frac{7}{12}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zadatak 13 Tijelo je omeđeno cilindrom $x^2 + z^2 = 1$ i ravninama $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $y = x$. Nadite njegov volumen.

Rješenje: Vidimo da u jednadžbi valjka nema koordinate y . To znači da je za svako $y = \text{const}$ presjek valjka s tom ravninom krug $x^2 + z^2 \leq 1$ pa zaključujemo da je to valjak duž osi y . Ravnine $y = 0$ i $y = x$ govore nam da po y integriramo od 0 do x . Da bi našli granice za x , treba provjeriti gdje valjak siječe ravninu $z = 0$. To je očito u točkama ± 1 . Jer je $x = 0$ međa, vidimo da treba uzeti jednu vrijednost, npr. onu pozitivnu, tj. $x = 1$. Još ostaje primjetiti da za z treba uzeti $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$. Sve skupa

$$V = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 - x^2} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} y \Big|_0^x \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$